

Утверждение 1 (О достаточном условии факторизации). Пусть все главные миноры матрицы A отличны от нуля ($|A_i| \neq 0$). Тогда представление матрицы A в виде (1) возможно.

$$A = BC, \text{ где} \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & & c_{1j} & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Определение 1. Матрица A^{-1} — обратная для матрицы A , если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Определение 2. Матрица A — самосопряженная, если

$$A = A^*, \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Метод Якоби.

$$x_i^{n+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Метод Зейделя.

$$x_i^{n+1} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad n = 0, 1, \dots \quad x^0 \text{ — задано} \quad (3)$$

Определение 3. Канонической формой записи двухслойного итерационного метода решения системы уравнений вида (4) называется его запись в виде:

$$B_{n+1} \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f, \text{ где}$$

$$\tau_{n+1} > 0, \quad \exists B_{n+1}^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x^0 \text{ — задано}$$

$$Ax = f, \quad (4)$$

где A - квадратная невырожденная матрица m -го порядка

Определение 4. Если $\tau_{n+1} = \tau$, $B_{n+1} = B$ (не зависит от итерации), то метод называется стационарным.

Определение 5. Если $B_{n+1} = E$, то метод называется явным.

Определение 6. Набор параметров при котором достигается наилучшая сходимость называется оптимальным.

Метод простой итерации.

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f, \text{ где}$$

$$\tau > 0, \quad \exists B_{n+1}^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x^0 \text{ — задано}$$

Метод Рундсона.

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f, \text{ где}$$

$$\tau_{n+1} > 0, \quad \exists B_{n+1}^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x^0 \text{ — задано}$$

Попеременно-треугольный метод. Пусть $A = R_1 + R_2$, где

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0.5a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & 0.5a_{mm} \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0.5a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0.5a_{mm} \end{pmatrix}$$

Тогда каноническая форма записи ПТИМ имеет следующий вид:

$$(E + \omega R_1)(E + \omega R_2) \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f$$

$$\tau > 0, n = 0, 1, \dots, x^0 - \text{ задано}$$

Определение 7. Линейное пространство $\mathcal{H}$.

$$\mathcal{H} = \{x | x = (x_1, \dots, x_m)\}$$

Определение 8. Скалярное произведение.

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : (x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$$

Определение 9. Евклидова (среднеквадратичная) норма.

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Определение 10. Энергетическая норма.

$$\|x\|_D = \sqrt{(x, x)_D}, \text{ если } D = E, \text{ то } \|x\|_D = \|x\|$$

Пусть $D = D^* > 0$ — самосопряженная, положительная матрица.
Введём скалярное произведение: $(x, y)_D = (Dx, y)$

Теорема 1. Итерационный метод (5) решения задачи (6) сходится при любом начальном приближении, тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы S по модулю меньше 1 (без доказательства)

$$\forall x^0 \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{V}^n\| = 0 \Leftrightarrow |\lambda_k^s| < 1, k = \overline{1, m}$$

$$B \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f, \text{ где} \tag{5}$$

$$\tau > 0, \exists B^{-1}, n = 0, 1, \dots, x^0 - \text{ задано}$$

$$Ax = f, |A| \neq 0, A(m \times m) \tag{6}$$

$$\mathcal{V}^{n+1} = S\mathcal{V}^n, \text{ где}$$

$$S = E - \tau B^{-1}A - \text{ матрица перехода от } n\text{-ой итерации к } (n+1)\text{-й}$$

Теорема 2 (Самарского). Если

$$1. A = A^* > 0, \tau > 0$$

$$2. B - 0.5\tau A > 0$$

Тогда итерационный метод (5) решения задачи (6) сходится в среднеквадратичной норме при любом начальном приближении, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^m (x_j^n - x_j)^2 \right)^{1/2} = 0$$

Следствие. Если $A = A^* > 0$, $2D > A$, тогда метод Якоби сходится в среднеквадратичной норме при любом начальном приближении, где D - диагональная матрица

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Следствие. $A = A^* > 0$ A обладает диагональным преобладанием ($a_{ii} > \sum_{j=1}^m |a_{ij}|, i \neq j$) Тогда метод Якоби сходится в среднеквадратичной норме при любом начальном приближении.

Следствие. Если $A = A^* > 0$, тогда метод Зейделя сходится в среднеквадратичной норме при любом начальном приближении.

Следствие. Если $A = A^* > 0$, $\gamma = \max_{1 \leq k \leq m} |\lambda_k^A|$ и $0 < \tau < \frac{2}{\gamma}$, тогда метод простой итерации сходится в среднеквадратичной норме при любом начальном приближении.

Теорема 3 (Оценка скорости сходимости). Пусть A, B - самосопряженные, положительно определенные операторы ($A = A^* > 0, B = B^* > 0$), $0 < \rho < 1$ и пусть

$$\frac{1-\rho}{\tau}B < A < \frac{1+\rho}{\tau}B \quad (7)$$

Тогда итерационный метод (9) сходится и имеет место оценка:

$$\|\mathcal{V}^{n+1}\|_B \leq \rho \|\mathcal{V}^n\|_B \quad (8)$$

$$B \frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f, \text{ где} \quad (9)$$

$$\tau > 0, n = 0, 1, \dots, x^0 \text{ — задано}$$

Следствие. Пусть

1. $A = A^* > 0, B = B^* > 0$
2. $\exists \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0 : \gamma_1 < \gamma_2$
3. $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$

Тогда, положив $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, имеет место оценка:

$$\|\mathcal{V}^{n+1}\|_B \leq \rho \|\mathcal{V}^n\|_B, \text{ где } \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad (10)$$

Следствие.

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f$$

Пусть

1. $A = A^* > 0, B = E$
2. $\gamma_1 = \min_k \lambda_k^A, \gamma_2 = \max_k \lambda_k^A$

Тогда, при $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ МПИ сходится и справедлива оценка:

$$\|\mathcal{V}^{n+1}\| \leq \rho \|\mathcal{V}^n\|, \text{ где } \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}, \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Теорема 4 (О сходимости ПТИМ). Пусть $A = A^* > 0$. При выполнении условия $\omega > \frac{\tau}{4}$ попеременно треугольный итерационный метод сходится в среднеквадратичной норме при любом начальном приближении.

Теорема 5 (Об оценке сходимости ПТИМ). Пусть $A = A^* > 0$ и пусть $\delta > 0$, $\Delta > 0$:

$$A \geq \delta E, R_2^* R_2 \leq \frac{\Delta}{4} A$$

Положим $\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$, $\delta = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, где

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{\delta}}{2} \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}}, \gamma_2 = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}$$

Тогда ПТИМ сходится и имеет место оценка:

$$\|\mathcal{V}^{n+1}\|_B \leq \rho \|\mathcal{V}^n\|_B, \text{ где } \rho = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + 3\sqrt{\eta}}, \eta = \frac{\delta}{\Delta}, B = (E + \omega R_2^*)(E + \omega R_2)$$

Утверждение 2. Пусть матрица A удовлетворяет следующим условиям:

1. A - имеет базис из собственных векторов $(\{e_i\}_1^m)$
2. $\left| \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right| < 1$ (требуется для сходимости)
3. $x_0 = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m$, $c_m \neq 0$

Тогда, найденные по степенному методу x_n такие, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e_m,$$

где e_m - собственный вектор, отвечающий максимальному по модулю собственному значению. Максимальное по модулю собственное значение можно найти по формулам:

$$\lambda_m^{(i)} = \frac{x_{n+1}^{(i)}}{x_n^{(i)}}, \lambda_m^{(n)} = \frac{(x_{n+1}, x_n)}{(x_n, x_n)}$$

С точностью:

$$\lambda_m^{(i)} = \lambda_m + O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$$

Утверждение 3. Если есть хотя бы 1 комплексное собственное значение $\lambda_k = \lambda_0 + i\lambda_1$, $\lambda_1 \neq 0$ Тогда, отвечающий ему собственный вектор — комплексный и начальное приближение для него должно быть комплексным

Определение 11. Форма Хессенберга (верхняя почти треугольная форма матрицы, $\times$ - вообще говоря, ненулевые элементы)

$$\text{ВПТ}\Phi = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times & \times \\ \times & \times & \times & \ddots & & \times \\ 0 & \times & \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

Определение 12. Преобразование Хаусхолдера вектора $\mathcal{V}$

$$H = E - 2 \frac{\mathcal{V}\mathcal{V}^T}{\|\mathcal{V}\|^2} \quad (11)$$

Утверждение 4. Пусть задан произвольный вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Тогда можно выбрать вектор $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ таким образом, что построенное по нему преобразование H подавляет все координаты вектора кроме первого.

$$Hx = \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \|x\|$$

Утверждение 5. Преобразование подобия сохраняют спектр матрицы

Лемма 1. Пусть задано произведение матриц $C = BA$, где B — верхнетреугольная, A — ВПТФ. Тогда C — ВПТФ.

Лемма 2. Пусть $C = BA$, где A — верхнетреугольная, B — ВПТФ. Тогда C — ВПТФ.

Определение 13. Интерполяционным полиномом Лагранжа называется полином вида:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) f(x_k), \quad c_k — \text{полином } n\text{-й степени}$$

Определение 14. Разделённой разностью первого порядка для функции $f(x)$, построенной по узлам x_i, x_j , называется отношение:

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}, \quad i = \overline{0, N}, j = \overline{0, N}, i \neq j. \quad (12)$$

Определение 15. Разделённой разностью второго порядка для функции $f(x, y)$, построенной по узлам x_{k-1}, x_k, x_{k+1} , называется отношение:

$$f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_k, x_{k+1}) - f(x_{k-1}, x_k)}{x_{k+1} - x_{k-1}}, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Утверждение 6. Разделённые разности порядка k представляются в виде:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\omega'_{0,k}(x_i)}. \quad (13)$$

Определение 16. $U_a(x_*) = \{x : |x - x_*| = a\}$ — a -окрестность корня x_* .

Определение 17. $S(x)$ — Липшиц-непрерывна (удовлетворяет условию Липшица) с $q = \text{const} > 0$ на (a, b) , если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$$|S(x_1) - S(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|.$$

Утверждение 7. Если $S(x)$ удовлетворяет условию Липшица с $0 < q < 1$ на $U_a(x_*)$ и $|x - x_0| < a$, то метод простой итерации (14) для решения уравнения (15) сходится (со скоростью геометрической прогрессии с знаменателем q).

$$x_{n+1} = S(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (14)$$

$$f(x) = 0, \quad (15)$$

Утверждение 8. Если $\exists M$:

$$\frac{1}{2} \left| \left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right)' \right| < M \quad \forall x \in U_a(x_*), \quad (16)$$

$$|x_0 - x_*| < \frac{1}{M}, \quad (17)$$

то итерационный метод Ньютона сходится и для него справедлива оценка:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{1}{M} (M|x_0 - x_*|)^{2^n}. \quad (18)$$

Определение 18. Остаточная функция ψ_i^n — погрешность аппроксимации разностной схемы (19)–(20) на решении исходной задачи.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + f(x_i, t_n), (x_i, t_n) \in \omega_{\tau h}; \quad (19)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), x_i \in \overline{\omega_h}. \quad (20)$$

Утверждение 9. Если $\gamma \leq 0.5$, то разностная схема (19) – (20) сходится в равномерной норме.

Теорема 6. Система линейных алгебраических уравнений (21) имеет единственное решение $v_{ij} \equiv 0$, $x_{ij} \in \overline{\omega_h}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) v_{ij} = \frac{v_{i+1,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1} + v_{i,j-1}}{h_2^2} \\ v_{ij}|_{\Gamma_h} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Следствие. Разностная задача (22) имеет единственное решение для любых правых частей f, μ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in G \quad (22)$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x_1, x_2) \quad (23)$$

Теорема 7 (Принцип максимума). Пусть $v_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \in \Gamma_h$, и $L_h v_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \in \omega_h$. Тогда $v_{ij} \geq 0$ всюду ($x_{ij} \in \overline{\omega_h}$).

Следствие. Рассмотрим две разностные задачи:

$$\begin{cases} L_h y_{ij} = \phi_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h \\ y_{ij} \text{ задано}, & x_{ij} \in \Gamma_h \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} L_h Y_{ij} = \Phi_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h \\ Y_{ij} \text{ задано}, & x_{ij} \in \Gamma_h \end{cases} \quad (25)$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$|y_{ij}| \leq Y_{ij}, \quad x_{ij} \in \Gamma_h \quad (26)$$

$$|\phi_{ij}| \leq \Phi_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h \quad (27)$$

Тогда $|y_{ij}| \leq Y_{ij}$ всюду ($x_{ij} \in \overline{\omega_h}$).

Теорема 8. Пусть решение задачи (22) – (23) $u(x_1, x_2) \in C^4(\overline{G})$. Тогда разностная схема (28) – (29) сходится со вторым порядком по h_1 и h_2 и имеет место оценка:

$$\|y - u\|_{C(\overline{\omega_h})} \leq M(h_1^2 + h_2^2)$$

где $M > 0$ и не зависит от h_1 и h_2 .

$$y_{\overline{x_1 x_1}, ij} + y_{\overline{x_2 x_2}, ij} = f_{ij}, \quad (x_1^i, x_2^j) \in \omega_h \quad (28)$$

$$y_{ij}|_{\Gamma_h} = \mu(x_1^i, x_2^j), \quad (x_1^i, x_2^j) \in \Gamma_h \quad (29)$$

Определение 19. Нормы в B_0 и в B_h согласованы, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$$

Определение 20. Сеточная функция (30) называется погрешностью разностной схемы (31).

$$z_h(x) = y_h(x) - u_h(x), x \in G_h \quad (30)$$

$$L_h y_h(x) = \phi_h(x), \quad x \in G_h \quad (31)$$

Определение 21. Сеточная функция (33) называется погрешностью аппроксимации разностной схемы (31) на решении исходной задачи (34).

$$L_h z_h(x) = \psi_h(x), \quad (32)$$

$$\text{где } \psi_h(x) = \phi_h(x) - L_h u_h(x) \quad (33)$$

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in G \quad (34)$$

Определение 22. Говорят, что разностная схема (31) аппроксимирует исходную задачу (34), если

$$\|\psi_h\|_h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Определение 23. Говорят, что разностная схема имеет порядок аппроксимации k , если $\exists M_1 > 0, k > 0$, которые не зависят от h и имеет место оценка:

$$\|\psi_h\|_h \leq M_1 h^k$$

Определение 24. Дифференциальная задача (34) называется корректно поставленной, если:

- $\forall f(x)$ решение существует и единственно;
- решение непрерывно зависит от $f(x)$.

Определение 25. Разностная схема (31) называется корректной, если при всех достаточно малых h :

- $\forall \phi(x)$ решение существует и единственно;
- $\exists M_2 = \text{const}, M_2 > 0, M_2$ не зависит от h , такая что:

$$\|y_h\|_h \leq M_2 \|\psi_h\|_h \quad (35)$$

Определение 26. Говорят, что разностная схема сходится к решению исходной задачи (34), если:

$$\|z_h\|_h = \|y_h - u_h\|_h \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

Определение 27. Говорят, что разностная схема имеет порядок точности k , если $\exists M_3 = \text{const}, M_3 > 0, M_3$ не зависит от h , что:

$$\|z_h\|_h \leq M_3 h^k$$

Теорема 9 (теорема Филиппова). Пусть исходная задача (34) поставлена корректно и пусть разностная схема (31) аппроксимирует задачу (34) и является корректной. Тогда решение разностной задачи (31) сходится к решению задачи (34), причём порядок точности разностной схемы совпадает с порядком аппроксимации.

Определение 28. Линейным m -шаговым разностным методом решения задачи (37) называется метод, записанный уравнением:

$$\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} y_{n-k} = \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k} \quad (36)$$

$\tau > 0$ - шаг, a_k, b_k - константы, $a_0 \neq 0, b_m \neq 0$. Уравнение (36) определено для $n = m, m+1, \dots$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u(t)), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (37)$$

Определение 29. Функция

$$\psi_n = - \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} u_{n-k} + \sum_{k=0}^m b_k f(t_{n-k}, u_{n-k}) \quad (38)$$

называется погрешностью аппроксимации разностного метода (36) на решении задачи (37).

Определение 30. Говорят, что разностная схема (36) удовлетворяет условию (α) , если все корни характеристического уравнения (39) лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причём на границе единичного круга нет кратных корней.

$$F_m(q, 0) = \sum_{k=0}^m a_k q^{m-k} = 0 \quad (39)$$

Теорема 10. Пусть разностная схема (36) удовлетворяет условию (α) и пусть $|f'_u| \leq L$, тогда при $0 \leq t_n = n\tau \leq T$, где τ достаточно мало, имеет место оценка:

$$|y_n - u(t_n)| \leq M \left(\sum_{j=m}^n \tau |\psi_j| + \max_{0 \leq i \leq m-1} |y_i - u(t_i)| \right)$$

Где $M = M(L, T) > 0$ не зависит от τ .

Определение 31.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} + A\bar{u}(t) = 0 \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \end{cases} \quad (40)$$

Система линейных уравнений (40) называется жёсткой, если:

1. $|Re\lambda_k^A| > 0, k = \overline{1, m}$ (устойчивость по Ляпунову)
2. $s = \frac{\max_k |Re\lambda_k^A|}{\min_k |Re\lambda_k^A|} \gg 1$ (s — число жёсткости)

Определение 32. Система (40) называется жёсткой на решении $\bar{v}(t), 0 < t < T$, если:

1. $Re\lambda_k^J < 0$ (устойчивость по Ляпунову)
2. $s(t) \gg 1, \quad k = \overline{1, m}$

Определение 33. Областью устойчивости разностного метода для задачи (41) называется множество всех точек комплексной плоскости $\mu = \tau\lambda \in \mathbb{C}$, для которых данный метод устойчив.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = f(t, \bar{u}(t)) \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \end{cases} \quad (41)$$

Определение 34. Разностный метод решения задачи (41) называется A -устойчивым, если он содержит в области устойчивости множество $Re\mu \leq 0$ (левую полуплоскость).

Определение 35. Разностная схема называется $A(\alpha)$ -устойчивой, если $|\arg(-\mu)| \leq \alpha$.